

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Лектор:

к.ф.-м.н. Алимгазинова Назгуль Шакаримовна

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Переходным процессом (ПП) называют процессы перехода от одного режима работы ЭЦ (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например, величиной амплитуды, фазы, формой или частотой действующей в схеме ЭДС, значениями параметров схемы, а также вследствие изменения конфигурации цепи.

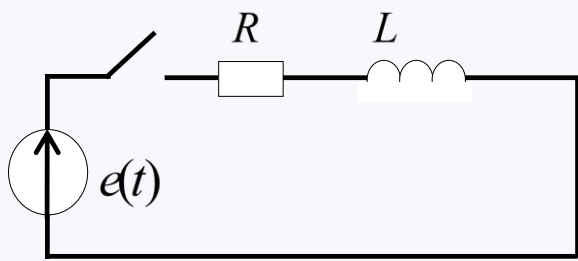
Коммутация – это процесс замыкания или размыкания ключей.



а) замыкание ключа



б) размыкание ключа



$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$u_L + iR = e,$$

$$L \frac{di}{dt} + iR = e,$$

$$i = E/R$$

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0.$$

$$i(t) = i_{np} + i_{св}$$

$$i_{св} = Ae^{pt}$$

*принужденная
составляющая*

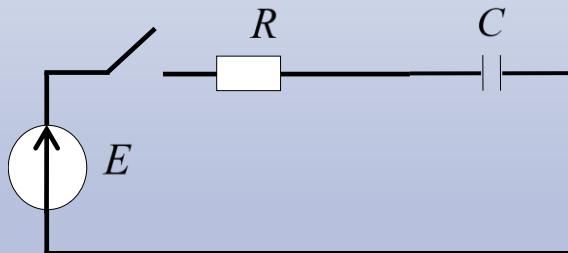
$$i_{np} = E/R$$

*свободная
составляющая*

$$t = 0 \quad A = \frac{E}{R}, \quad p = -\frac{R}{L}$$

Полный ток

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



$$i = \frac{dq}{dt},$$

$$q = u_C C,$$

$$i = C \frac{du_C}{dt},$$

$$iR + u_C = E$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

*Полное
напряжение*

$$u(t) = u_{np} + u_{св}$$

Принужденная составляющая величины (тока или напряжения) физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая ЭДС.

Свободная составляющая величины (тока или напряжения) физически представляет собой составляющую свободную от вынуждающей силы.

Полный ток - ток, который в действительности протекает по той или иной ветви цепи при переходном процессе. **Полное напряжение** - напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе. i и u

Время $t=0_-$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t=0$ - время в момент коммутации, $t=0_+$ - время в первый момент после коммутации.

ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

Первый закон коммутации:

Ток, протекающий через индуктивный элемент непосредственно до коммутации $i_L(0_-)$ равен току, протекающему через тот же индуктивный элемент непосредственно после коммутации $i_L(0_+)$:

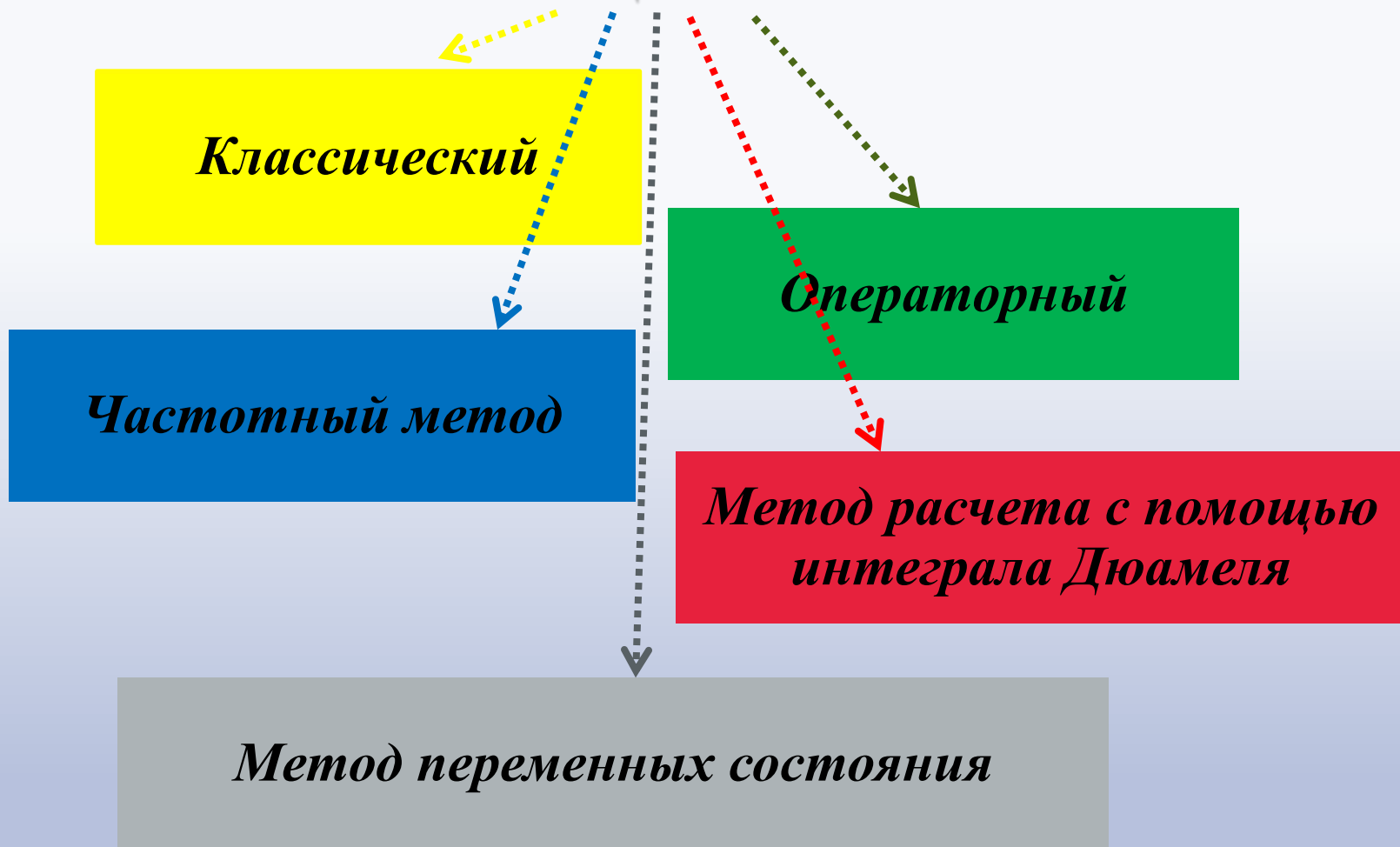
$$i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

Второй закон коммутации:

Напряжение на емкостном элементе непосредственно до коммутации $u_C(0_-)$ равно напряжению на том же емкостном элементе непосредственно после коммутации $u_C(0_+)$:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ



Общие этапы применения методов:

- 1. Выбирают положительные направления токов в ветвях электрической цепи.**
- 2. Определяют начальные условия: значения токов и напряжений непосредственно до коммутации.**
- 3. Составляют характеристическое уравнение и определяют его корни.**
- 4. Получают выражения для искомых токов и напряжений как функции времени.**

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД

Классический метод заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.

Этапы применения классического метода расчета переходных процессов:

1. Выбирают положительные направления токов в ветвях электрической цепи.
2. Определяют начальные условия: значения токов и напряжений непосредственно до коммутации.
3. Составляют систему уравнений по законам Кирхгофа.
4. Определяют принужденные значения токов и напряжений в цепи.
5. Записывают систему уравнений для свободных составляющих токов.
Составляют характеристическое уравнение и определяют его корни.
6. Получают выражения для искомых токов и напряжений как функции времени в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Степень характеристического уравнения равна числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального её упрощения и не зависит от вида ЭДС источников ЭДС в схеме

$$\nu = n_L + n_C - m_L - k_C,$$

n_L - число индуктивностей в схеме, n_C - число емкостей, m_L - число индуктивностей, токи в которых не могут быть заданы произвольно (или же это число узлов, в которых сходятся только ветви, содержащие катушки индуктивности), k_C - число емкостей, напряжения на которых не могут быть заданы произвольно (или же число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы).

*1. Если характеристическое уравнение цепи представляет собой **уравнение первой степени**, тогда параметр затухания имеет одно значение, которое одинаково для всех токов ветвей схемы, т.е. вся цепь, охвачена единым переходным процессом и уравнение для свободной составляющей тока*

$$i_{св} = Ae^{pt}.$$

Постоянная интегрирования A определяется по значению свободного тока при $t = 0$

$$i_{св}(0) = A.$$

2. Если дано характеристическое уравнение **второй степени** и его корни действительны и не равны, то

$$i_{c\delta} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$i'_{c\delta} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

$$t = 0$$

$$\begin{cases} i_{c\delta}(0) = A_1 + A_2, \\ i'_{c\delta}(0) = A_1 p_1 + A_2 p_2, \end{cases}$$

$i_{c\delta}(0), i'_{c\delta}(0), p_1, p_2$ - известные величины.

$$\begin{cases} A_1 = \frac{i'_{c\delta}(0) - p_2 i_{c\delta}(0)}{p_1 - p_2}, \\ A_2 = i_{c\delta}(0) - A_1. \end{cases}$$

3. Если корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, то

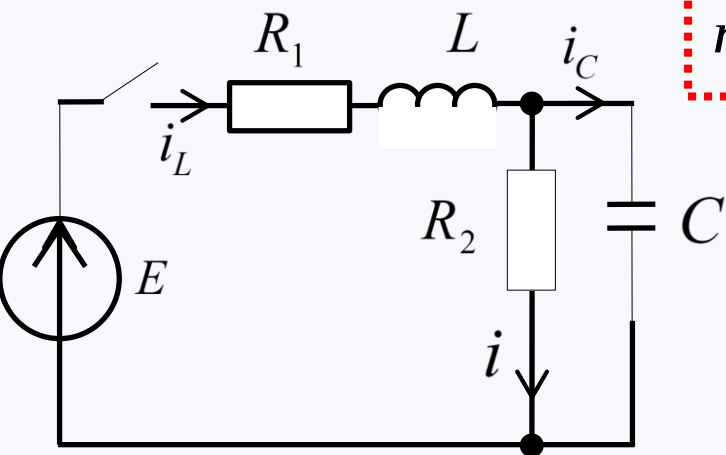
$$i_{cv} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu),$$

ω_0 - циклическая частота и коэффициент затухания δ

$$i'_{cv} = -A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) + -A\omega_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \nu).$$

$$t = 0$$

$$\begin{cases} i_{cv}(0) = A \sin(\nu), \\ i'_{cv}(0) = -A\delta \sin(\nu) + -A\omega_0 \cos(\nu). \end{cases}$$



$$m = 2, \quad n = 3, \quad n_{IT} = 0, \quad k = n - m - n_{IT} + 1 = 2.$$

$$t = 0_-$$

$$i_L(0_-) = 0,$$

$$i_C(0_-) = 0,$$

$$i(0_-) = 0$$

$$i_L(0_-) = i + i_C$$

$$u_C(0_-) = i(0_-) \cdot R_2,$$

$$u_C(0_-) = 0.$$

$$t = 0_+$$

$$\begin{cases} i_L - i - i_C = 0, \\ i_L R_1 + L \frac{di_L}{dt} + i R_2 = E, \\ \frac{1}{C} \int i_C dt - i R_2 = 0. \end{cases}$$

$$i(t) = i_{np} + i_{c\beta}$$

*Для
принужденных
составляющих*

$$\begin{cases} i_{L,np} - i_{np} - i_{C,np} = 0, \\ i_{L,np} R_1 + L \frac{di_{L,np}}{dt} + i_{np} R_2 = E, \\ u_{C,np} - i_{np} R_2 = 0. \end{cases}$$

$$E = \text{const}$$

$$i_{C,np} = 0$$

$$u_{L,np} = L \frac{di_{L,np}}{dt} = 0$$

$$i_{L,np} - ?$$

$$u_{C,np} - ?$$

$$\begin{cases} i_{L,np} - i_{np} = 0, \\ i_{L,np} R_1 + i_{np} R_2 = E. \end{cases}$$

$$u_{C,np} = i_{np} R_2$$

$$i_{L,np} = i_{np} = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$u_{C,np} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Для свободных составляющих

$$\begin{cases} i_{L,c\theta} - i_{c\theta} - i_{C,c\theta} = 0, \\ i_{L,c\theta} R_1 + L \frac{di_{L,c\theta}}{dt} + i_{c\theta} R_2 = 0, \\ \frac{1}{C} \int i_{C,c\theta} dt - i_{c\theta} R_2 = 0. \end{cases}$$

$$i_{c\theta} = Ae^{pt}$$

$$L \frac{di_{L,c\theta}}{dt} = L \frac{d}{dt} (Ae^{pt}) = Lp(Ae^{pt}) = Lp \cdot i_{L,c\theta},$$

$$\frac{1}{C} \int i_{C,c\theta} dt = \frac{1}{C} \int Ae^{pt} dt = \frac{1}{Cp} \cdot Ae^{pt} = \frac{1}{Cp} \cdot i_{C,c\theta}.$$

$$\begin{cases} i_{L,c\theta} - i_{c\theta} - i_{C,c\theta} = 0, \\ i_{L,c\theta} R_1 + Lp i_{L,c\theta} + i_{c\theta} R_2 = 0, \\ \frac{1}{Cp} i_{C,c\theta} - i_{c\theta} R_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + Lp & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = 1 \cdot R_2 \cdot \frac{1}{Cp} + R_2(R_1 + Lp) + (R_1 + Lp) \frac{1}{Cp} = 0$$

$$p^2 LCR_2 + p(CR_2 R_1 + L) + (R_1 + R_2) = 0 \longrightarrow p_1, p_2$$

$$i_{L,c\delta} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$u_{C,c\delta} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

$$t = 0$$



$$A_1, A_2, B_1, B_2$$

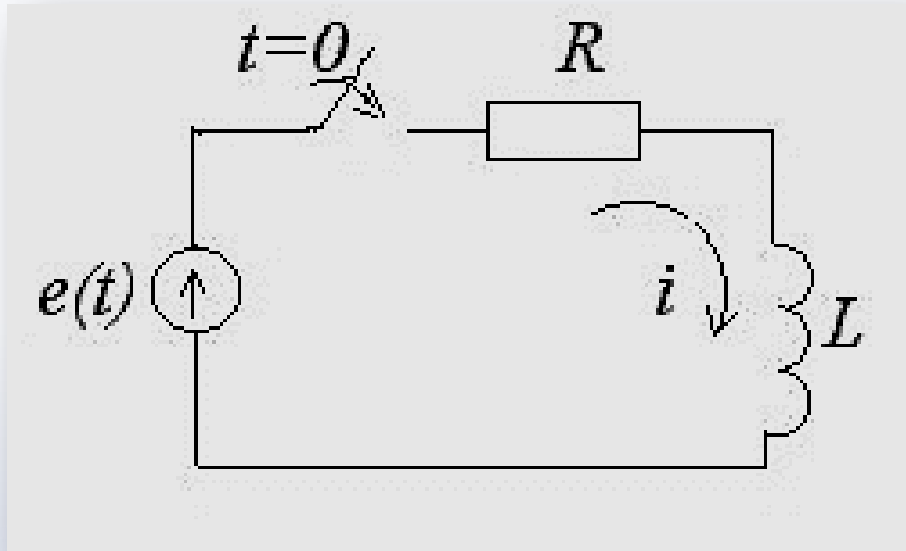
$$i_L(t) = i_{L,np} + i_{L,c\delta},$$

$$i(t) = i_{np} + i_{c\delta},$$

$$i_C(t) = i_{C,np} + i_{C,c\delta}.$$

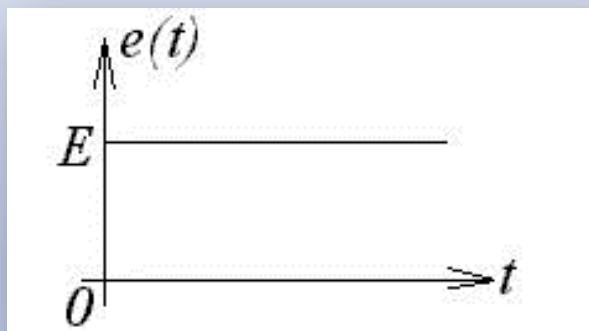
$$u_C(t) = u_{C,np} + u_{C,c\delta}.$$

Переходные процессы в RL -цепи



$$Ri + L \frac{di}{dt} = e(t),$$

а) Если подана постоянная ЭДС

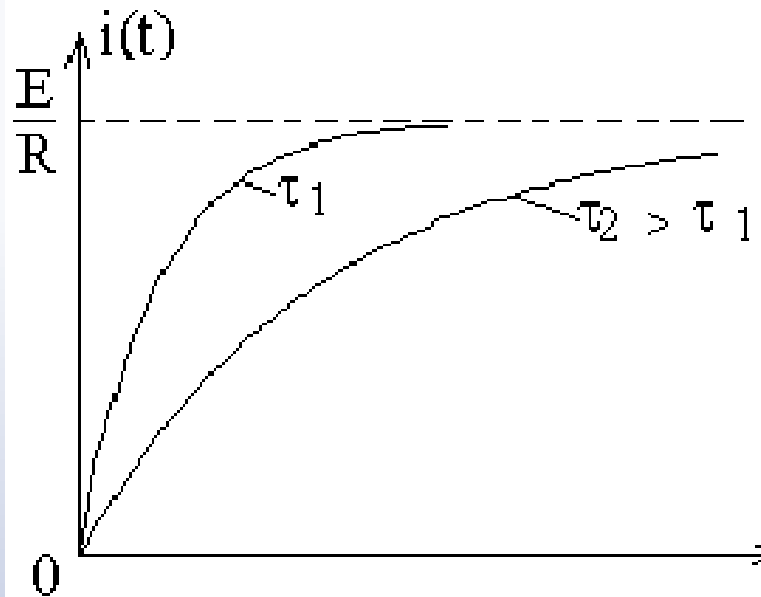


$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} + A e^{pt},$$

$$A = -E/R$$

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

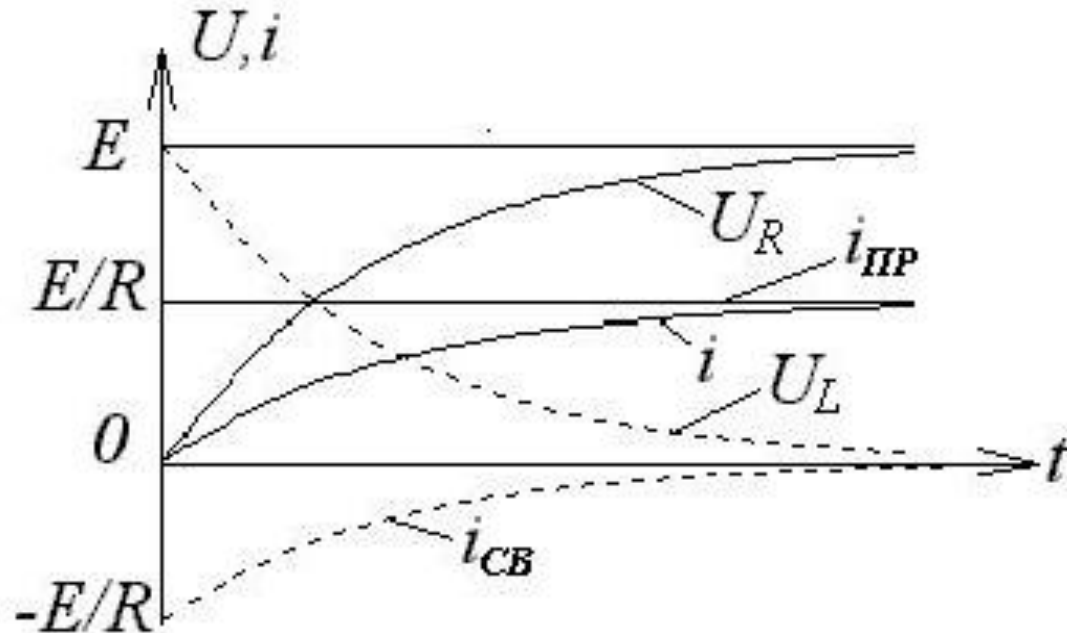


$$\tau_L = L / R$$

Постоянная времени
RL - цепи

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t}.$$

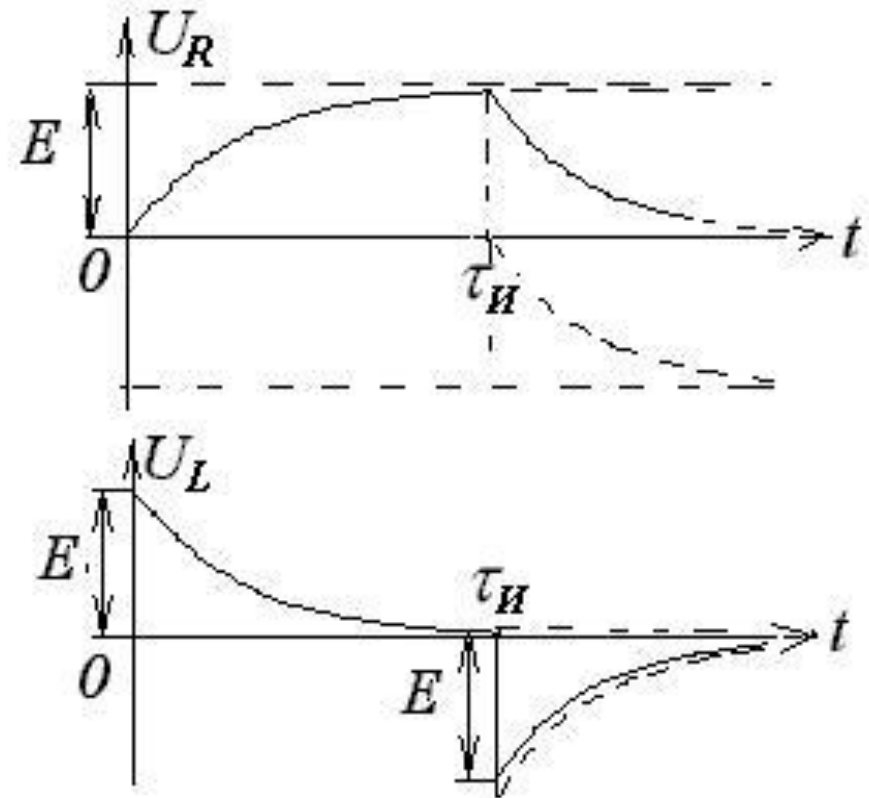
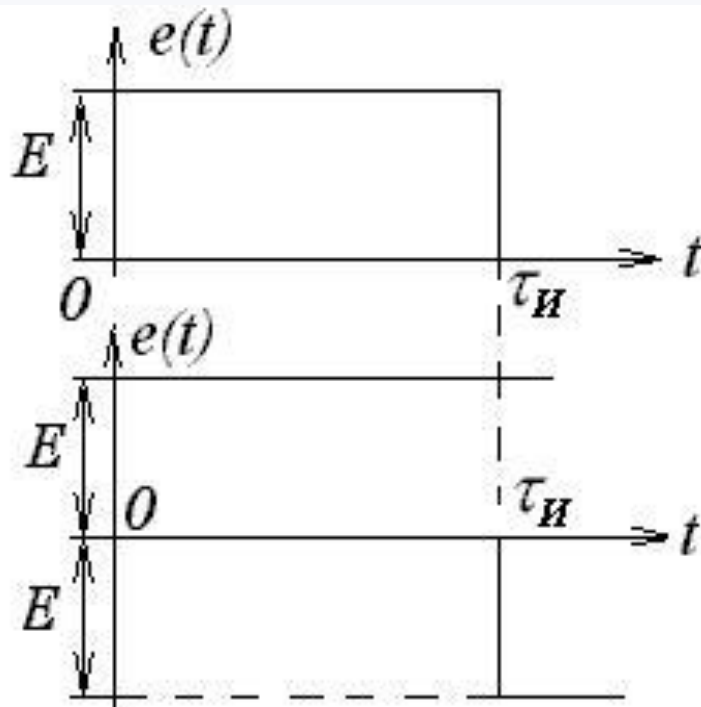
$$U_R(t) = Ri = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$



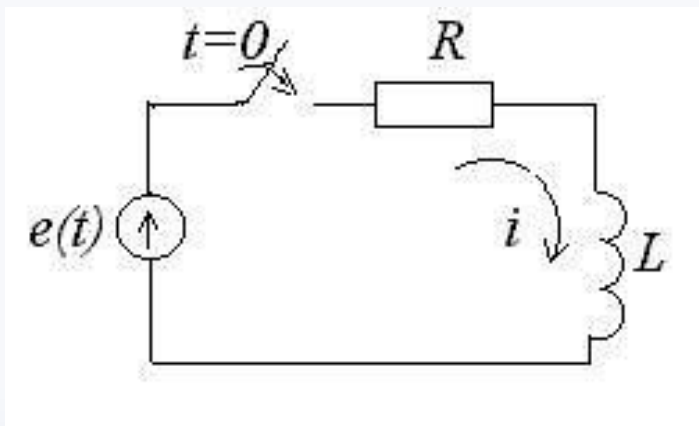
$$i(\tau_L) = I(1 - e^{-1}) \approx 0,632 I,$$

$$\frac{E}{R} = I,$$

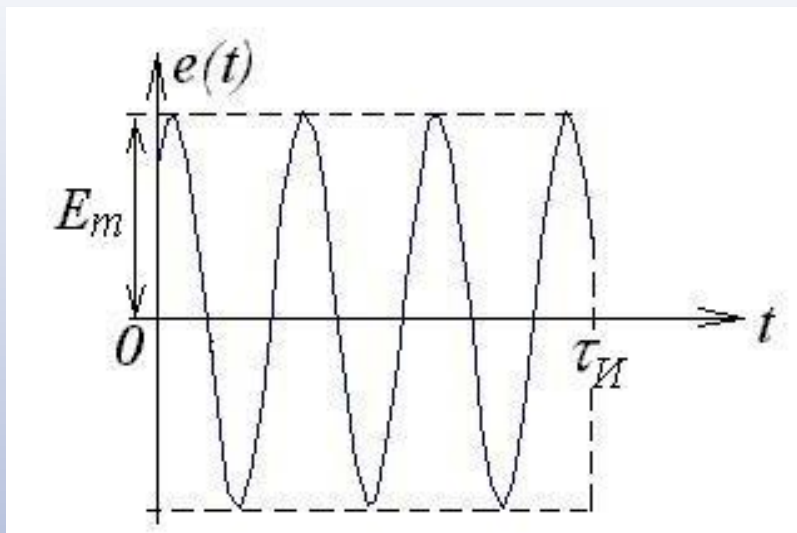
$$i_{CB}(\tau_L) = Ie^{-1} \approx 0,368 I,$$



б) Если подана переменная ЭДС



$$Ri + L \frac{di}{dt} = e(t),$$



$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$i_{\text{пр}}(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi)$$

$$I_m = \frac{E_m}{|Z|}$$

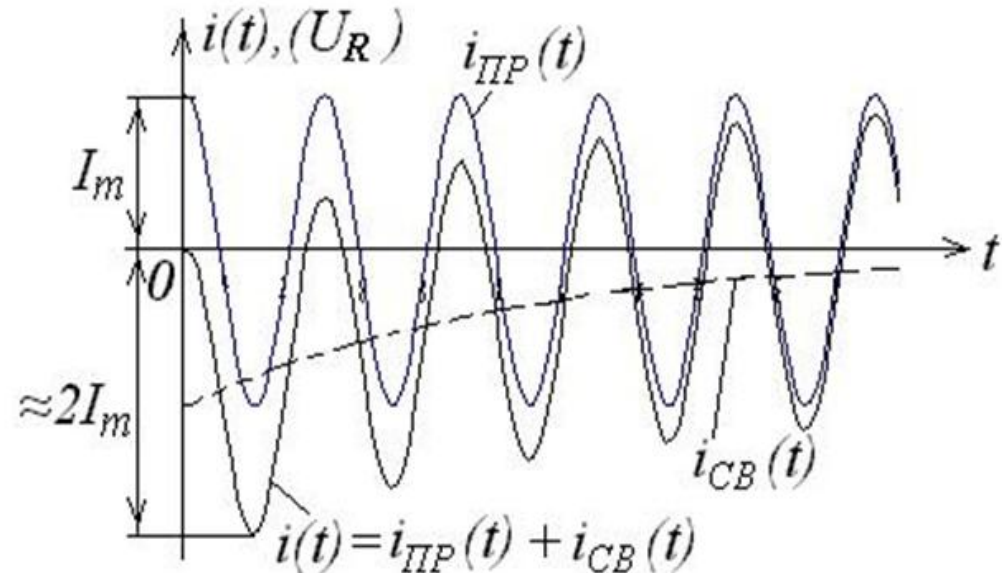
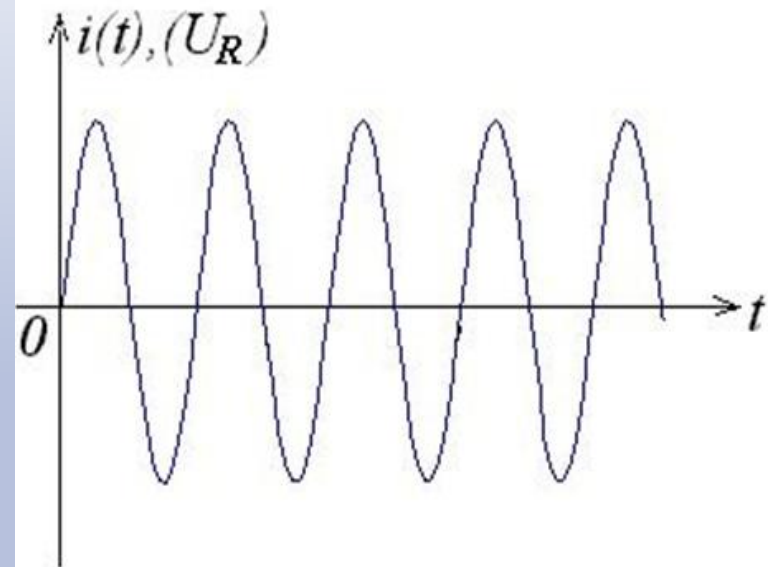
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

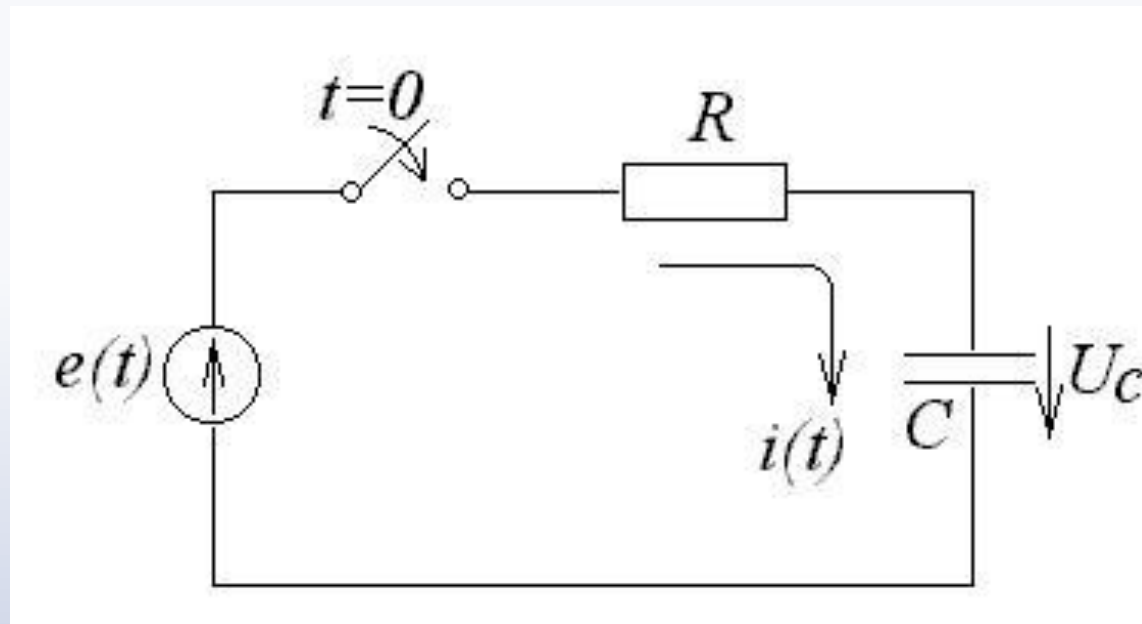
$$i(t) = I_m [\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}]$$

$$U_R(t) = Ri(t) = RI_m [\cos(\omega t + \psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}].$$

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} = I_m [-\omega L \sin(\omega t + \psi - \varphi) - R \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}].$$



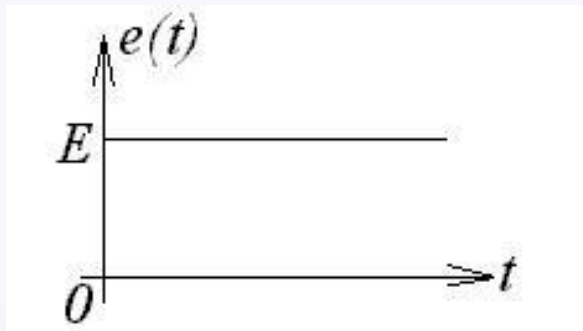
Переходные процессы в RC -цепи



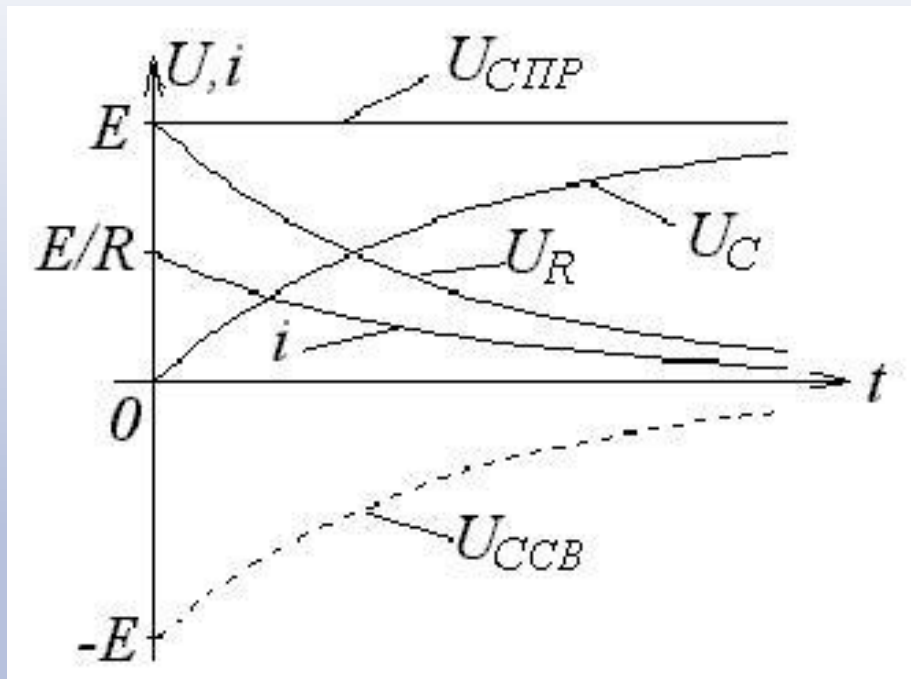
$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt},$$

$$e(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C.$$

а) Если подана постоянная ЭДС



$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases}$$



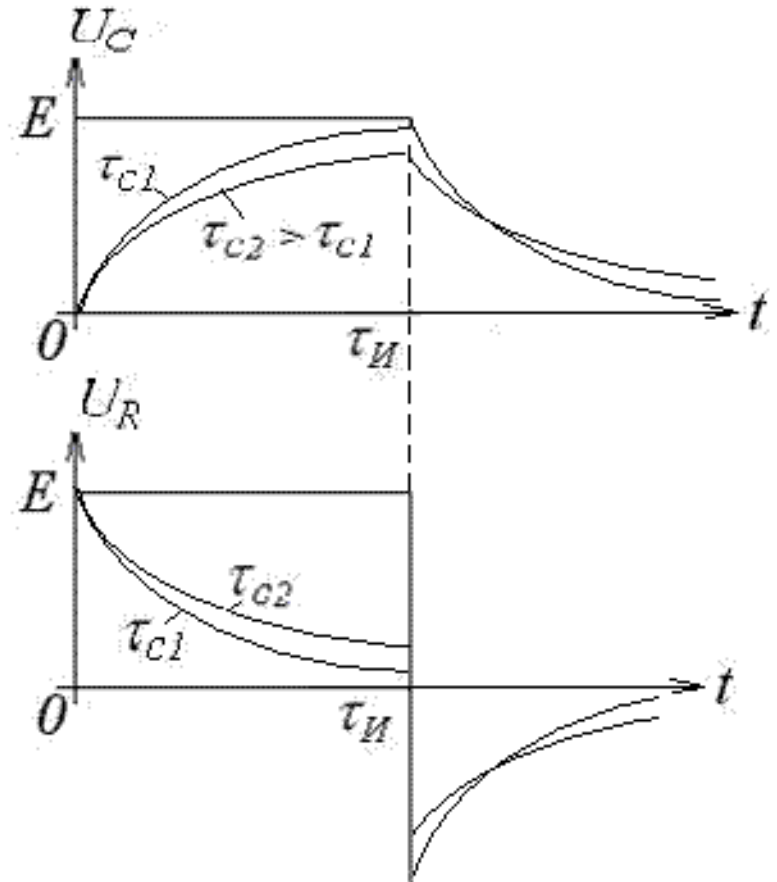
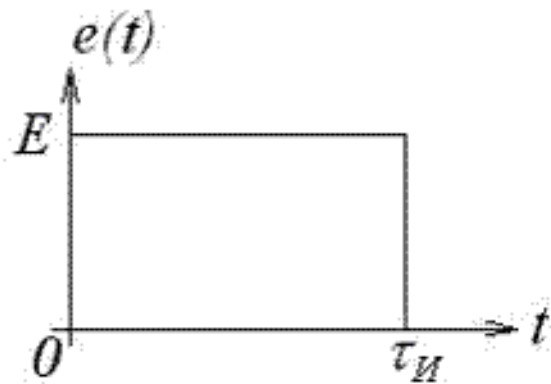
$$U_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right),$$

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_c}},$$

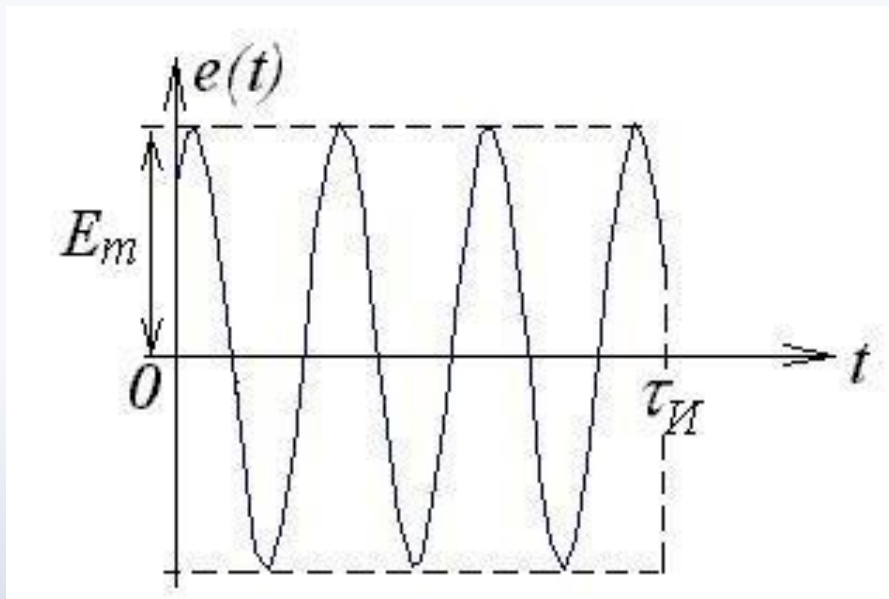
$$U_R(t) = Ri(t) = E e^{-\frac{t}{\tau_c}}.$$

$$\tau_C = RC,$$

Постоянная времени
RC - цепи



б) Если подана переменная ЭДС



$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$$

$$U_{\text{CПР}} = U_m \cos(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

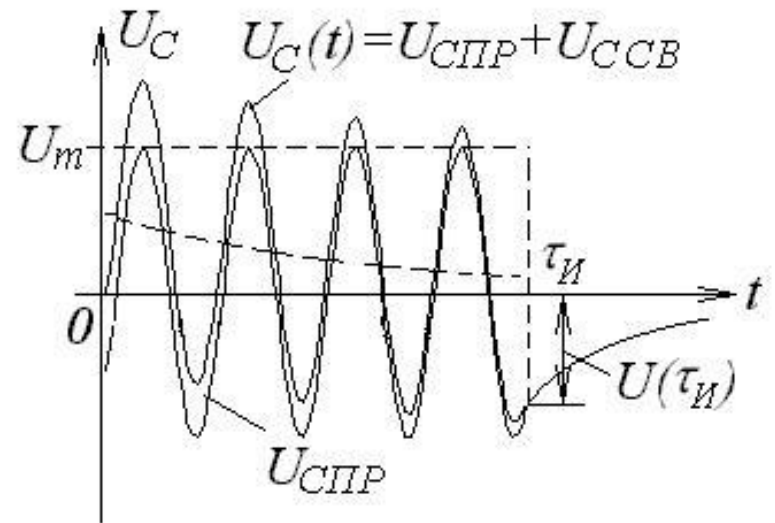
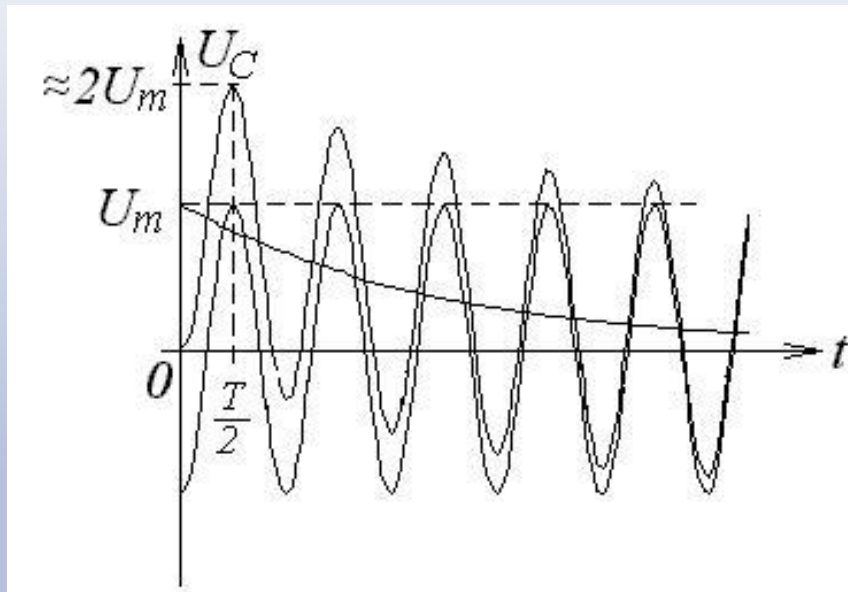
$$U_m = \frac{E_m}{|Z| \omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

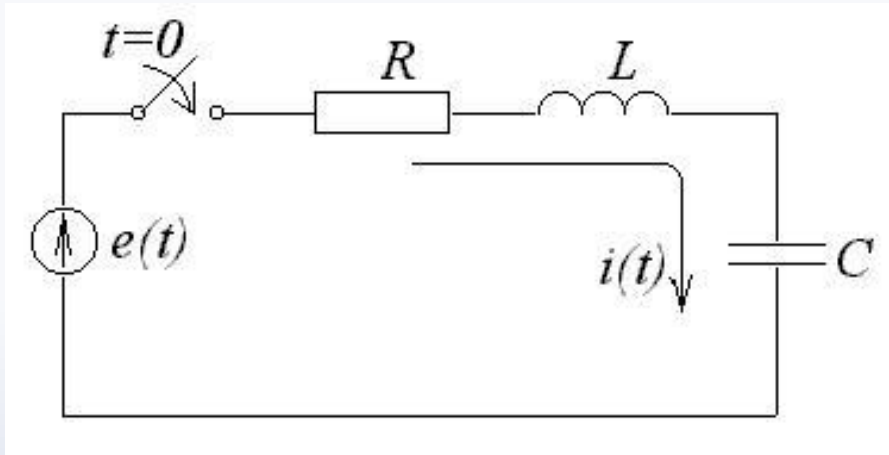
$$\varphi = \arctg\left(-\frac{1}{\omega C R}\right)$$

$$U_C(t) = U_m \left[\cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\varphi - \psi) e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right]$$

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt} = -CU_m \left[\omega \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{RC} \sin(\varphi - \psi) e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right]$$



Переходные процессы в RLC -цепи



$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t),$$

$$i(t) = i_{\text{ПР}}(t) + i_{\text{СВ}}(t).$$

$$i_{\text{СВ}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

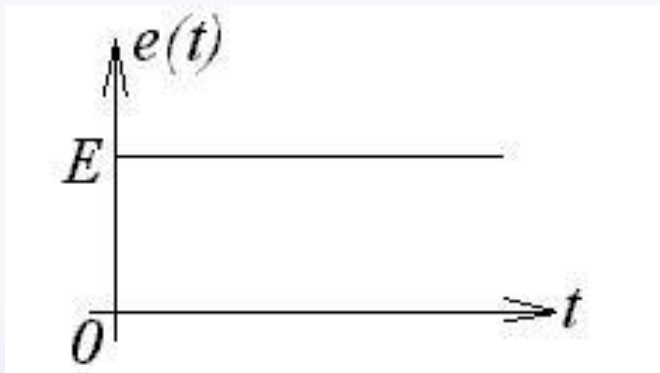
$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}},$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

$$\delta = \frac{R}{2L},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а) Если подана постоянная ЭДС



$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases}$$

$$i_{\text{IP}}(t) = 0$$

$$i(t) = i_{\text{CB}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

$$t = 0$$

$$e(0) = Ri(0) + L \frac{di}{dt}(0) + U_C(0),$$

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0, \quad U_C(0) = U_C(0-) = 0$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$$

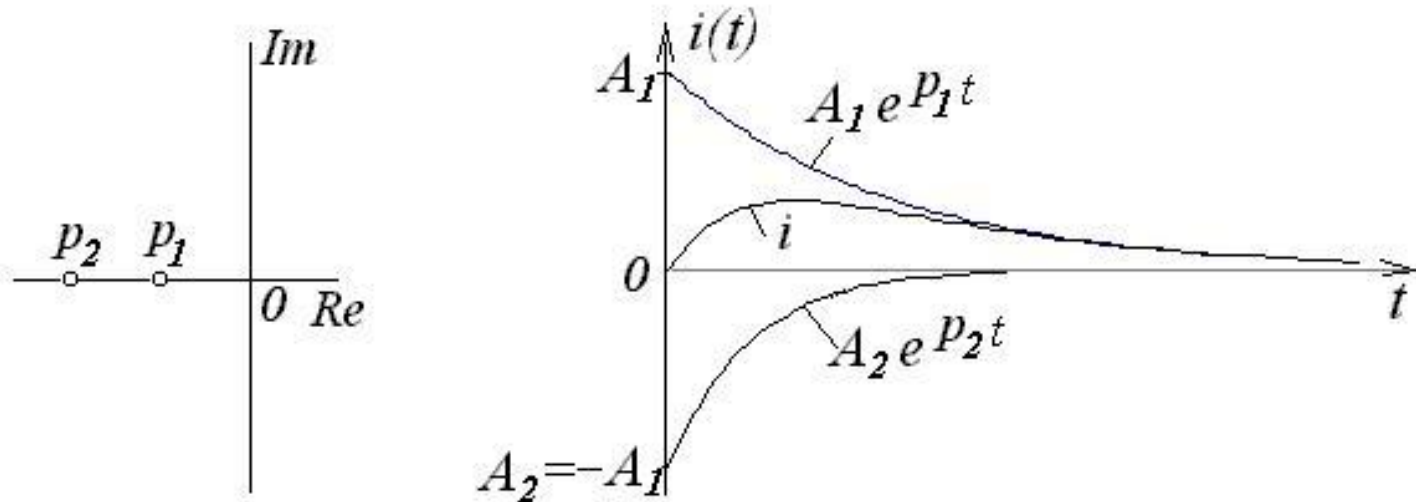
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L}, \end{cases}$$

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)},$$

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

$$a) \delta > \omega_0, \quad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho, \quad Q = \frac{\rho}{R} < 0.5$$

(апериодический процесс)



$$U_R = Ri(t) = \frac{ER}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{(p_1 - p_2)}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

$$U_C = E - U_R - U_L = E \left[1 + \frac{1}{(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right]$$

б) $\delta = \omega_0$, $R = 2\rho$, $Q = 0,5$ (критический режим)

$$p_{1,2} = -\delta$$

$$i(t) = \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}$$

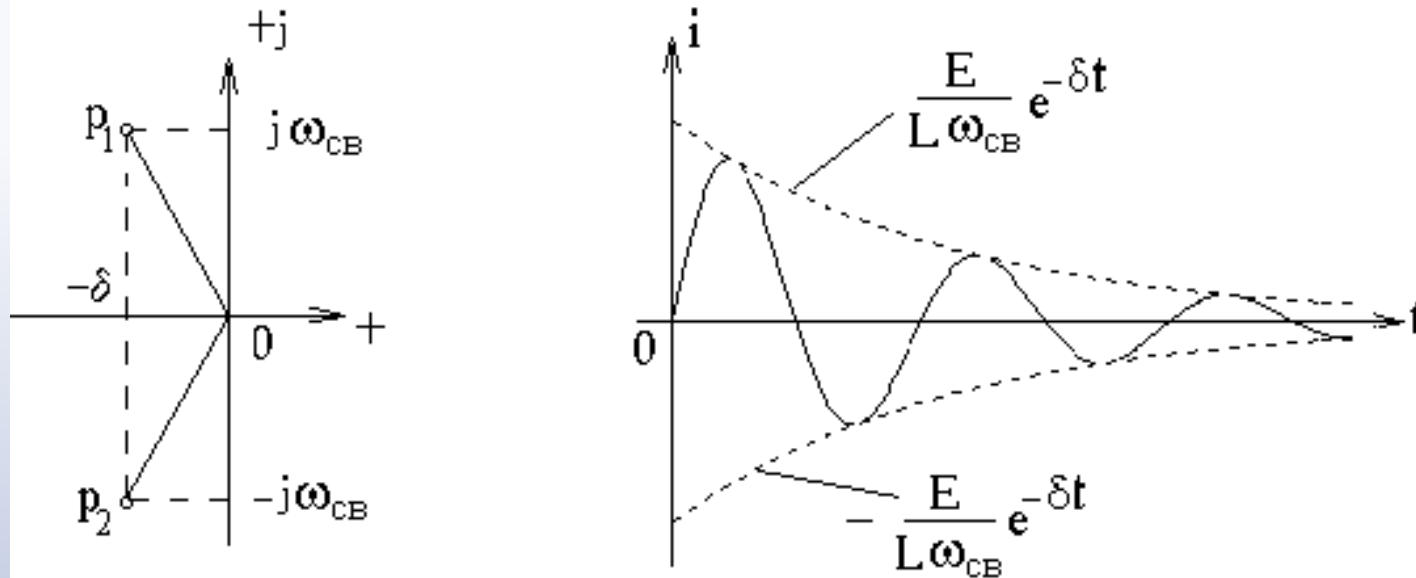
при ненулевых начальных условиях

$$i(t) = \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{E - U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E - U}{L} t e^{-\delta t}$$

$$i(t) = \lim_{p_1 \rightarrow p_2 = -\delta} \frac{\varphi'(p_1)}{\psi'(p_1)} = \lim_{p_1 \rightarrow -\delta} \frac{E t e^{-p_1 t}}{L} = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}$$

в) $\delta < \omega_0$, $R < 2\rho$, $Q > 0,5$, $p_{1,2} = -\delta \pm j$
(колебательный процесс)

$$\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



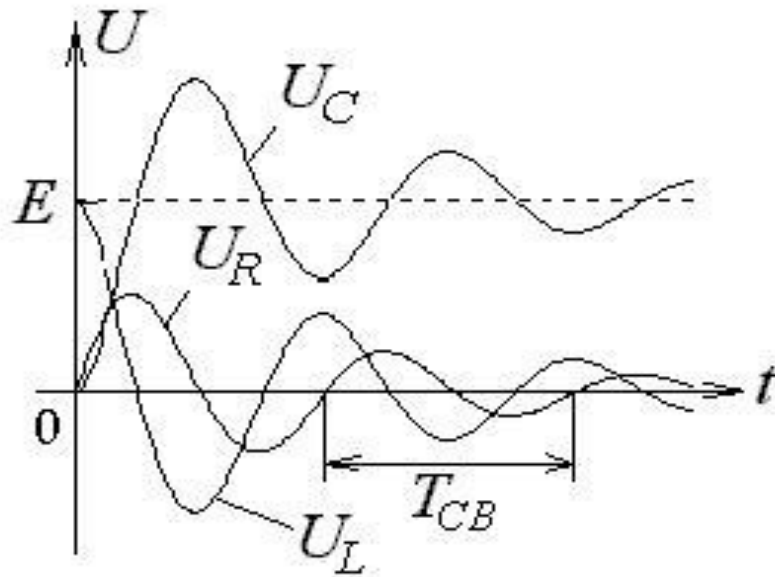
$$i(t) = \frac{E}{2j\omega_{CB}L} (e^{(-\delta + j\omega_{CB})t} - e^{(-\delta - j\omega_{CB})t}) =$$

$$= \frac{E}{2j\omega_{CB}L} e^{-\delta t} (\cos \omega_{CB} t + j \sin \omega_{CB} t - \cos \omega_{CB} t + j \sin \omega_{CB} t) = \frac{E}{\omega_{CB}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{CB} t$$

$$U_R = Ri = \frac{ER}{\omega_{CB} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{CB} t$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} = - \frac{\omega_0}{\omega_{CB}} E e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t - \varphi)$$

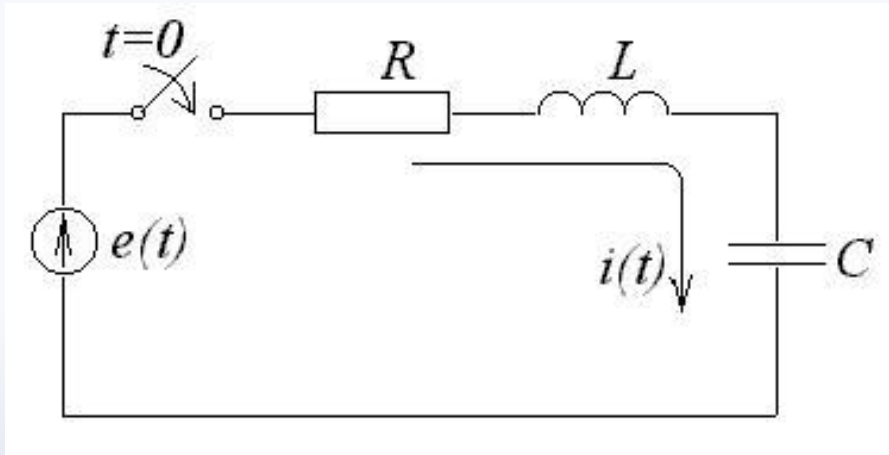
$$U_C = E - U_R - U_L = E \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{CB}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \varphi) \right]$$



$$\varphi = \arctg \frac{\omega_{CB}}{\delta}$$

$$T_{CB} = \frac{2\pi}{\omega_{CB}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

б) Если подана переменная ЭДС



$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t),$$

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi),$$

$$i_{\text{пр}}(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

$$I_m = \frac{E_m}{|Z|},$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$i(0-) = i_L(0-) = 0 = i_{\text{IP}}(0) + i_{\text{CB}}(0).$$

$$I_m \cos(\psi - \varphi) + A_1 + A_2 = 0,$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{e(0)}{L} = \frac{E_m}{L} \cos \psi,$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{di_{\mathbf{M}}}{dt}(0) + \frac{di_{\mathbf{ep}}}{dt}(0) = -\omega I_m \sin(\psi - \varphi) + p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

$$\begin{cases} I_m \cos(\psi - \varphi) + A_1 + A_2 = 0, \\ -\omega I_m \sin(\psi - \varphi) + p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E_m}{L} \cos \psi. \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{\omega}{p_1 - p_2} I_m \sin(\psi - \varphi) + \frac{p_2}{p_1 - p_2} I_m \cos(\psi - \varphi) + \frac{E_m}{L(p_1 - p_2)} \cos \psi,$$

$$A_2 = -\frac{\omega}{p_1 - p_2} I_m \sin(\psi - \varphi) - \frac{p_1}{p_1 - p_2} I_m \cos(\psi - \varphi) - \frac{E_m}{L(p_1 - p_2)} \cos \psi.$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{I_m}{p_1 - p_2} \cos(\psi - \varphi)(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) +$$

$$+ \frac{E_m}{L(p_1 - p_2)} \left[\cos \psi + \frac{\omega L}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) \right] (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

